Geometría Proyectiva

Jaime Benabent

VERSIÓN PRELIMINAR a April 10, 2021

Trabajamos con la extensión natural del plano euclideo al plano proyectivo, añadiendo un punto del infinito para cada dirección. Al plano proyectivo lo notamos $\mathbb{P}_2\mathbb{R}$.

Nociones previas

En esta sección recordamos algunas nociones previas que deberiamos manejar antes de empezar a estudiar la geometría proyectiva.

Lema del Seno. En un triángulo ABC de circunradio R

$$\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C} = 2R$$

Prueba. Sea O el circuncentro del triángulo y M el punto medio del lado BC. Entonces

$$\sin A = \sin \angle BAC = \sin \frac{\angle BOC}{2} = \sin \angle MOC = \frac{MC}{OC} = \frac{a}{2R}$$

Despejando obtenemos

$$\frac{a}{\sin A} = 2R$$

Y haciendo lo mismo para los ángulo B y C se sigue el aserto. ■

Ahora vamos a definir el cociente de longitudes dirigidas y lo pondremos en práctica con los teoremas de Ceva y Meneleao.

Definición: Longitudes dirigidas. Sea A, B y C puntos colineales, entonces el cociente dirigido $\frac{AB}{BC}$ es positivo si B está entre A y C y negativo en caso contrario.

Dados tres puntos colineales tendremos que especificar cuando trabajamos con un cociente dirigido en lugar de con un cociente normal sin signo. En los teoremas de Ceva y Menelao a continuación trabajaremos con cocientes dirigidos.

Definición: Ceviana. En un triángulo ABC una ceviana es una recta que une un vértice con un punto de la recta que determina el lado opuesto.

Teorema de Ceva. En un triángulo ABC consideramos tres cevianas AX, BY y CZ. Las cevianas concurren si y solo si

$$\frac{BX}{XC} \cdot \frac{CY}{YA} \cdot \frac{AZ}{ZB} = 1$$

Prueba. ■

Teorema de Menelao. En un triángulo ABC consideramos X, Y y Z puntos de las rectas BC, CA y AB respectivamente. Estos puntos son colineales si y solo si

$$\frac{BX}{XC} \cdot \frac{CY}{YA} \cdot \frac{AZ}{ZB} = -1$$

Prueba. ■

Ejercicios

Teorema de la Bisectriz. Sea ABC un triángulo y D la intersección de la bisectriz interna de $\angle BAC$ con BC. Prueba que

$$\frac{AB}{AC} = \frac{DB}{DC}$$

Formas trigonométricas de Ceva y Menelao. Combina el Teorema de Ceva con el Lema del Seno para obtener una forma trigonométrica del Teorema de Ceva. Intenta hacer lo mismo con el Teorema de Menelao.

Existencia de centros. Aplica el teorema de Ceva en su forma adecuada para demostrar la existencia del baricentro, del ortocentro y del incentro.

1 Cross-Ratio y Razón Armónica

En esta sección introducimos los conceptos de cross-ratio y de razón armónica acompañados de sendas tandas de ejercicios para cimentar bien tales nociones y profundizar en ellas.

Sobre el cross-ratio

Empezamos trabajando con el concepto de cross-ratio, central en la geometría proyectiva.

En esta primera definición, donde los puntos son colineales, vemos las longitudes dirigidas:

Definición: Cross-Ratio. Sean A, B, C y D colineales. Su cross-ratio es

$$\mathcal{R}(A,B;C,D) := \frac{AC}{CB} / \frac{AD}{DB}$$

En esta segunda definición, donde los puntos son cocíclicos, el signo es positivo si los segmentos AB y CD no se cortan y negativo en caso de que se corten:

Definición: Cross-Ratio. Sean A, B, C y D cocíclicos. Su cross-ratio es

$$\mathcal{R}(A,B;C,D) := \pm\frac{AC}{CB} / \frac{AD}{DB}$$

En esta tercera definición, el cross-ratio para rectas concurrentes, el signo es positivo si dos de los cuatro ángulos formados por las rectas l y r no contiene ningún punto de s ni de t, y negativo en caso contrario:

Definición: Cross-Ratio. Sea P un punto y l, r, s y t rectas que pasan por P. Su cross-ratio es

$$\mathcal{R}(l,r;s,t) := \pm\frac{\sin{(l,s)}}{\sin{(s,r)}} / \frac{\sin{(l,t)}}{\sin{(t,r)}}$$

Una vez vistas estas tres definiciones uno se tiene que preguntar el porque de esta elección de los signos. Date cuenta de que, en cierto sentido, coinciden con la definición del signo en longitudes dirigidas.

Resulta que con esta elección de signos tenemos el teorema principal del Cross-Ratio, que dara lugar a definir de manera natural el concepto de perspectividad.

Teorema: Cross-Ratio. Sea P un punto y l, r, s y t rectas que pasan por P. Sean A, B, C y D puntos en l, r, s y t respectivamente tales que A, B, C y D son colineales o cíclicos. Entonces

$$\mathcal{R}(l,r;s,t) = \mathcal{R}(A,B;C,D)$$

Prueba. ■

Corolario: Proyecciones. Dados cuatro puntos colineales o cocíclicos podemos proyectarlos desde otro punto cualquiera en otra recta o circunferencia, y como corolario del teorema anterior el cross-ratio de las proyecciones de los puntos se conserva. Esta invarianza del cross-ratio a través de las proyecciones es el corazón de la geometría proyectiva y es lo que usaremos continuamente.

Notación. Para aligerar la notación denotamos el cross-ratio de cuatro puntos simplemente por $(A, B; C, D)$. Si tenemos otra cuaterna $(A', B'; C', D')$ de puntos cuyo cross-ratio es el mismo por proyecciones desde un punto P escribimos $(A, B; C, D) \stackrel{P}{=} (A', B'; C', D')$.

Ejercicios

Igualdades. Sean A, B, C y D colineales o concíclicos. Entonces

$$(A, B; C, D) = (B, A; C, D)^{-1} = (A, B; D, C)^{-1} = (C, D; A, B)$$

Valores del cross-ratio. Sean A, B y C puntos colineales o cocíclicos. Prueba que existe un único punto D en la recta o la circunferencia definida por estos puntos tal que

$$(A, B; C, D) = k$$

Cross-Ratio con el punto medio. Sean A, B y D puntos colineales y M el punto medio del segmento AB. ¿Cuánto vale $(A, B; M, D)$?

Cross-Ratio con el infinito. Sean A, B y C puntos colineales y P_∞ el punto del infinito de tal recta. ¿Cuánto vale $(A, B; C, P_\infty)$?

Sobre la razón armónica

Introducimos ahora el concepto de armonía.

Definición: Armonía. El caso mas importante, pues es el mas común, es cuando nuestro cross-ratio vale -1. En este caso decimos que los puntos (colineales o cocíclicos) A, B, C y D (o en su defecto las rectas l, r, s y t) son **armónicos**. Generalmente si son colineales decimos que forman una **cuaterna armónica** y si son cocíclicos decimos que se trata de un **cuadrilátero armónico**.

Definición: El cuarto armónico. Sean A, B y C puntos (colineales o cocíclicos). El único punto D (en la recta o en la circunferencia definida por estos puntos) tal que $(A, B; C, D) = -1$, que existe gracias al [Ejercicio 2.], es el **cuarto armónico** de C respecto a AB.

La armonía es importante porque aparece de manera natural en cantidad de configuraciones.

Ejercicios

Igualdades. ¿Que ocurre con las igualdades del primer ejercicio de la tanda anterior si los puntos están en armonía?

Comprobación sencilla. En el plano consideramos los puntos $A = (-1, 0), B = (1, 0), X = (\frac{1}{100}, 0)$ y $Y = (m, 0)$. Si $(A, B; X, Y) = -1$ encuentra el valor de m.

Simetría del cuarto armónico. Sean A, B, C y D puntos (colineales o cocíclicos) tales que D es el cuarto armónico de C respecto a AB. ¿Cual es el cuarto armónico de D respecto a AB?

El cuarto armónico del punto medio. Sean A y B puntos y sea M el punto medio del segmento AB. Entonces $(A, B; M, P_\infty)$ es una cuaterna armónica.

Cuaterna armónica desde circunferencia. Sea ω una circunfernecia y P un punto fuera de ella. Sean X e Y en ω tales que PX y PY son tangentes a esta. Sea r una recta por P que corta a ω en A y en B y sea $Q = AB \cap XY$ prueba que $(A, B; P, Q)$ es cuaterna armónica.

Punto medio en cuaterna armónica. Los puntos A, X, B y P son colineales en ese orden y forman una cuaterna armónica. Sea M el punto medio del segmento AB. Demuestra que $PX \cdot PM = PA \cdot PB$ y que $MX \cdot MP = (\frac{1}{2}AB)^2$.

Cuadriláteros Armónicos. Sea ω una circunferencia y P un punto fuera de ella. Sean X e Y puntos distintos de ω tales que PX y PY son tangentes a ω y toma una recta que pase por P y corte a ω en A y B. Entonces

1. El cuadrilátero $AXBY$ es armónico.
2. Sea Q tal que QA y QB son tangentes a ω. Entonces Q está en la recta XY.
3. Si $R = \overline{AB} \cap \overline{XY}$ entonces $(A, B; R, P)$ y $(X, Y; R, Q)$ son cuaternas armónicas.

Proyectividad e Inversión. Si en el lema de cuadriláteros armónicos A y B son un diametro de ω entonces P y Q son inversos si invertimos respecto a ω.

Proyectividad y Cevianas. Sea ABC triángulo con cevianas AD, BE y CF. Sea $X = EF \cap BC$. Entonces $(X, D; B, C)$ es armónico.

Cuaternas armónicas completando el cuadrilatero. Sea $ABCD$ cuadrilátero tal que AC y BD se cortan en K y tal que AB y CD se cortan en P. Si PK cortan a AD en M y a BC en N entonces $(P, K; M, N)$ es armónico.

Tres tangentes. En un triángulo ABC sean BE y CF alturas. Sea M el punto medio de BC. Prueba que ME, MF y la recta paralela a BC por A son todas tangentes a AEF.

2 Proyectividad e Inversión

La inversión y la proyección están muy cercanamente relacionadas por los conceptos de polos y polares. Recordamos primero lo que es una inversión y ya pasamos a definir el concepto de polar, con el que trabajaremos.

Definición: Inversión respecto a una circunferencia. Sea ω una circunferencia de centro O. El **inverso** de un punto P respecto a ω es el punto P^* en el rayo OP tal que $OP \cdot OP^* = 1$.

Teorema. Sea P un punto cualquiera y sean A, B, C, D puntos colineales o cocíclicos. Sean $A*, B*, C*, D*$ los inversos de estos puntos respecto a una circunferencia de centro P. Prueba que $(A, B; C, D) = (A*, B*; C*, D*)$.

Prueba. Trivial por el Teorema de conservación del cross-ratio. ■

Definición: Polar. Sea ω una circunferencia de centro O. La **polar** de un punto P distinto de O es la recta que pasa por P^* perpendicular a OP. El **polo** de una recta l que no pasa por O es el punto que la tiene como polar.

Lema. La noción de polo está bien definida. esto es, para cada recta l que no pasa por O existe un único punto que la tiene como polar.

Prueba. ■

Teorema de La Hire. Sea ω una circunferencia de centro O. Sean X e Y puntos distintos de O. Entonces X está en la polar de Y si y solo si Y está en la polar de X.

Prueba. ■

Teorema de Brocard. Sea $ABCD$ un cuadrilatero cíclico arbitrario inscrito en una circunferencia de centro O. Sea $P = AB \cap CD$, $Q = BC \cap DA$ y $R = AC \cap BD$. Entonces P, Q y R son los polos de QR, RP y PQ respectivamente. Además el punto O es el ortocentro de PQR.

Prueba. ■

Ejercicios

Polares y circunferencia ortogonal. Sea ω una circunferencia y sean P y Q puntos distintos del centro tal que uno está en la polar del otro. Prueba que la circunferencia de diametro PQ es ortogonal a ω.

3 Teoremas en Geometría Proyectiva

En esta sección recopilamos y demostramos una tanda de Teoremas bien conocidos en geometría proyectiva: Desargues, Pappus, Pascal y Brianchon.

Teorema de Desargues. En $\mathbb{P}_2\mathbb{R}$. Sea P un punto y ABC un triángulo. Sean A', B' y C' proyecciones de A,B y C con centro P respectivamente. Entonces $AB \cap A'B'$, $BC \cap B'C'$ y $CA \cap C'A'$ son colineales.

Prueba. Aplicación directa del Teorema de Menelao. ■

Teorema de Pappus. Caso degenerado del teorema de Pascal.

Prueba. ■

Teorema de Pascal. Sea $ABCDEF$ un hexágono inscrito en una sección cónica. Entonces $AB \cap DE$, $BC \cap EF$ y $CD \cap FA$ son colineales en la denominada la **recta de Pascal** de esta configuración.

Prueba. ■

El teorema de Brianchon es el dual del teorema de Pascal.

Teorema de Brianchon. Sea $ABCDEF$ un hexágono cuyos lados son tangentes a una sección cónica. Entonces, los segmentos AD, BE y CF son concurrentes.

Prueba. ■

4 Problemas

Problema 1. En un triángulo ABC sean D, E y F los pies de las alturas por A, B y C respectivamente. Las alturas se cortan en el ortocentro H. Los puntos P y Q están en la recta EF verificando $AP \perp EF$ y $HQ \perp EF$. Las rectas DP y QH se cortan en R. Calcula $\frac{HQ}{HR}$.

Prueba. Fijándonos en el cuadrilátero $BFEC$ tenemos que $(A, H; D, N)$ es armónico. Proyectando a través de P en la recta determinada por HQ tenemos

$$-1 = (A, H; D, N) \stackrel{P}{=} (P_\infty, H; R, Q)$$

Luego H es el punto medio del segmento RQ y se sigue el aserto. ■

Problema 2. En un triángulo ABC sea D el pie de la bisectriz por A y sea X en la recta BC tal que $\angle DAX = \frac{\pi}{2}$. Prueba que $(B, C; D, X)$ es una cuaterna armónica.

Prueba. La paralela a AX por D corta a AB en P y a AC en Q. Proyectando dese A la cuaterna armónica $(P, Q; D, P_\infty)$ en la recta BC se sigue el aserto. ■

Problema 3. Sea AB un segmento y $k \neq 1$ un real positivo. Prueba que el lugar geométrico de los puntos C satisfaciendo $\frac{CA}{CB} = k$ es una circunferencia.

Prueba. Sean X e Y los dos punto en AB con $\frac{XA}{XB} = k = \frac{YA}{YB}$ tales que están X, A, Y y B en ese orden, haciendo cuentas es fácil ver que $(A, B; Y, X)$ es armónico. Sea C un punto en tal lugar geométrico. Por el teorema de la bisectriz $\angle ACY = \angle BCY$. Proyectando a través de C en la perpendicular a CY por Y es fácil ver que esta es paralela a AX. Se sigue $\angle XCY = \frac{\pi}{2}$, luego está sobre la circunferencia de diámetro XY. ■

Problema 4. Sea $ABCD$ un cuadrilátero. Sean $P = AB \cap CDQ = AD \cap BC, R = AC \cap PQ, S = BD \cap PQ$. Prove that $(P, Q; R, S)$ es cuaterna armónica.

Prueba. ■